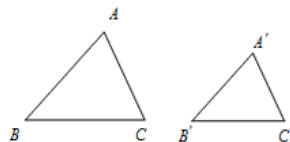


第2讲 相似三角形的基本模型

知识回顾：

1. 相似三角形的定义：形状相同的两个三角形叫做相似三角形；如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ；
2. 相似三角形的判定：平行出相似、两角分别相等、三边对应成比例、两边对应成比例且夹角相等。
3. 相似三角形的性质：对应角相等，对应边成比例（这个比称为相似比），两个三角形的周长等于相似比，面积的比等于相似比的平方；



一、A字模型

基础模型：如图，已知 $DE \parallel BC$ ，则 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，从而 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 。

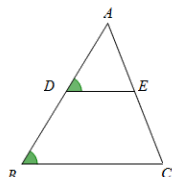


图1

变式模型：

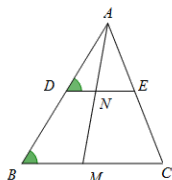


图3

反A字模型：图1中， $\angle ADE = \angle B$ ，则 $\triangle AED \sim \triangle ACB$ ， $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 。

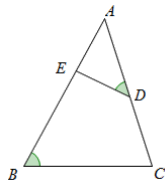
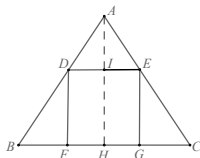


图1

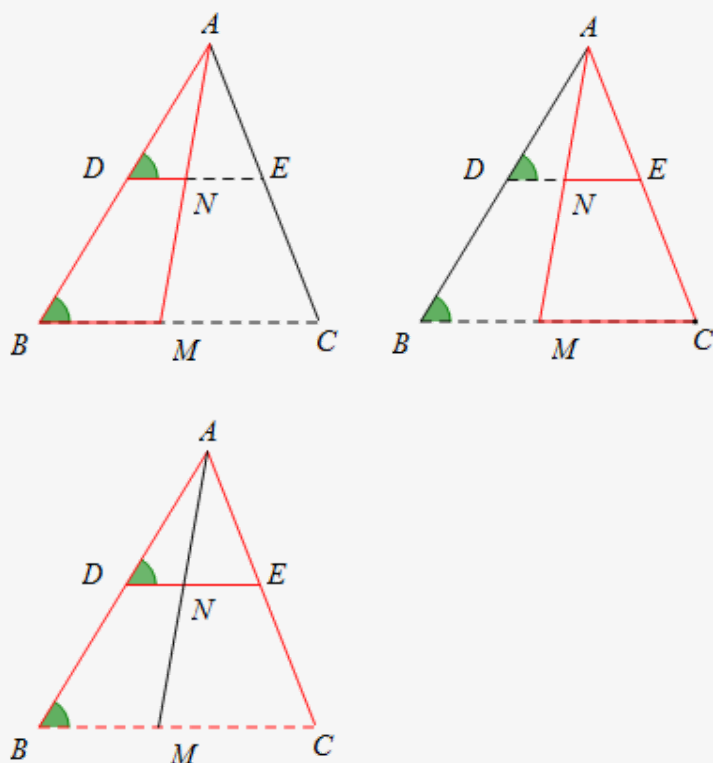
三角形内接矩形：如图，在 $\triangle ABC$ 内部有一个矩形 $DEGF$ ，易得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ， $\therefore \frac{AI}{AH} = \frac{DE}{BC}$ （相似三角形的对应高线成比例）。



【备注】1、“A”字相似模型是利用平行线构造相似的基本模型。（前提为存在两组平行线）

2、变式模型是为了提醒学生，对基础模型可以简单变形后，学生也应该能从图中准确快速的找到A字，找到相似的三角形。可以让学生在变式模型中找一找A字。

如下图中，红色部分的三角形就是图中的A字。

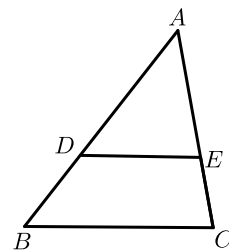


3、三角形内接矩形：可通过相似，与二次函数结合求内接矩形面积的最大值（其本质需要利用两个相似三角形的对应底与高之比为相似比）

举个“栗子”

栗子1

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， DE 分别交 AB ， AC 于点 D ， E 。若 $AD = 3$ ， $BD = 2$ ， $BC = 6$ ，求 DE 的长。



【备注】A字基本模型，利用相似三角形对应边成比例求解

【答案】 $\frac{18}{5}$ 。

【解析】 $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

$$\text{又} \because AD = 3, DB = 2, BC = 6,$$

$$\therefore AB = AD + DB = 5,$$

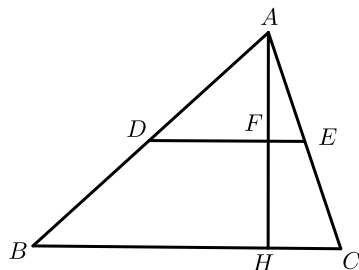
$$\text{即} \frac{3}{5} = \frac{DE}{6},$$

$$\therefore DE = \frac{18}{5}.$$

【标注】【知识点】相似A字型

栗子2

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别是边 AB, AC 的中点, 高 AH 交 DE 于点 F , 若 $AH = 2$, 则 AF 的长为 _____.



【备注】A字变式模型, 由 D, E 分别为 AB, AC 中点可得 $ED \parallel BC$, $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$,

由 $\triangle AFE \sim \triangle AHC$ 可得 $\frac{AF}{AH} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$;

或直接由 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 的性质得对应高线之比等于相似比求

【答案】1

【解析】 $\because D, E$ 分别为 AB, AC 中点,

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC,$$

$\because AH$ 是 $\triangle ABC$ 的高,

$$\therefore AH \perp BC,$$

$$\therefore \angle AHB = 90^\circ,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\therefore AF \perp DE,$$

$\therefore AF$ 是 $\triangle ADE$ 的高,

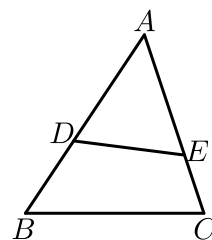
$$\because DE \parallel BC,$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ADE &\sim \triangle ABC, \\ \therefore \frac{DE}{BC} &= \frac{AF}{AH} = \frac{1}{2}, \\ \therefore AH &= 2, \\ \therefore AF &= 1.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似A字型

栗子3

3. 若 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，且 $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ ，若四边形 $BCED$ 的面积是 2，则 $\triangle ADE$ 的面积是 _____。



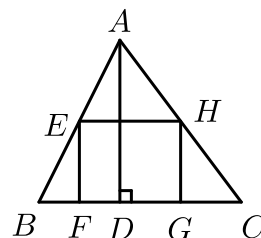
【答案】1.6 或 $\frac{8}{5}$

【解析】 $\because \triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，且 $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ ，
 $\therefore \triangle ADE$ 与 $\triangle ACB$ 的面积比为 $:\frac{4}{9}$ ，
 $\therefore \triangle ADE$ 与 四边形 $BCED$ 的面积比为 $:\frac{4}{5}$ ，又 四边形 $BCED$ 的面积是 2，
 $\therefore \triangle ADE$ 的面积是 $\frac{8}{5}$ ，
 故答案为： $\frac{8}{5}$ 。

【标注】【知识点】相似反A字型

栗子4

4. 如图，矩形 $EFGH$ 内接于 $\triangle ABC$ ，且边 FG 落在 BC 上。若 $BC = 3$ ， $AD = 2$ ， $EF = \frac{2}{3}EH$ ，那么 EH 的长为 _____。

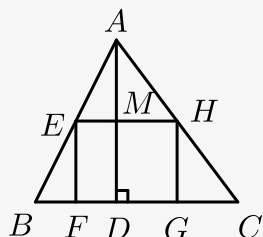


【备注】三角形内接矩形模型

题中给出了矩形长宽的等量关系设未知数，利用 $\triangle AEH$ 与 $\triangle ABC$ 对应底边之比等于对应高线之比求解；

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】如图，设 AD 与 EH 的交点为 M ，



$\because$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，

$\therefore EH \parallel BC$ ，

$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{EH}{BC}$ ，

$\because AD \perp BC$ ，

$\therefore MD = EF$ ，

设 $EH = 3x$ ，则 $EF = 2x$ ， $AM = AD - EF = 2 - 2x$ ，

$\therefore \frac{2 - 2x}{2} = \frac{3x}{3}$ ，

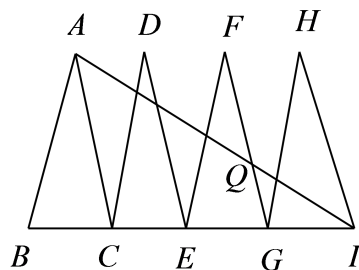
解得： $x = \frac{1}{2}$ ，

则 $EH = \frac{3}{2}$ 。

【标注】【知识点】三角形内接四边形问题

独步天下1

5. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， $\triangle DCE$ ， $\triangle FEG$ ， $\triangle HGI$ 是4个全等的等腰三角形，底边 BC ， CE ， EG ， GI 在同一条直线上，且 $AB = 2$ ， $BC = 1$ ，连接 AI ，交 FG 于点 Q ，则 $QI = ()$ 。



- A. 1 B. $\frac{\sqrt{61}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{66}}{6}$ D. $\frac{4}{3}$

【备注】方法二：易得 $\triangle QGI \sim \triangle ACI$ ，则 $\frac{QI}{AI} = \frac{GI}{CI} = \frac{1}{3}$ ，

想求 QI 的长度，可先求 AI ，过点 A 作 $AM \perp BC$ ，由等腰三角形三线合一的性质，可得

$$MC = \frac{1}{2}, AM = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

利用勾股定理求出 AI 即可

解析中给出的是子母模型的求解思路，讲解完子母模型后可再让学生进行尝试

【答案】D

【解析】 $\because \triangle ABC$ 、 $\triangle DCE$ 、 $\triangle FEG$ 为三个全等的等腰三角形，

$$\therefore AB = HI = 2, GI = BC = 1, BI = 4BC = 4.$$

$$\therefore \frac{AB}{BI} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AB}{BI} = \frac{BC}{AC}.$$

$$\therefore \angle ABI = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ABI \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AC}{AI} = \frac{AB}{BI}.$$

$$\therefore AB = AC,$$

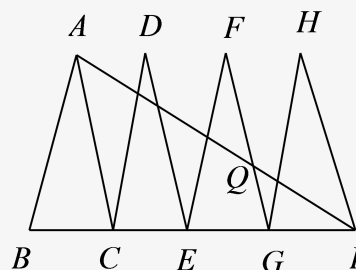
$$\therefore AI = BI = 4.$$

$$\therefore \angle ACB = \angle FGE,$$

$$\therefore AC \parallel FG,$$

$$\therefore \frac{QI}{AI} = \frac{GI}{CI} = \frac{1}{3},$$

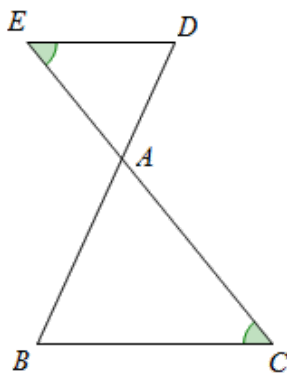
$$\therefore QI = \frac{1}{3}AI = \frac{4}{3}.$$



【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

二、8字模型

基础模型：



如图，已知 $DE \parallel AB$ ，则 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，从而 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 。

变式模型：

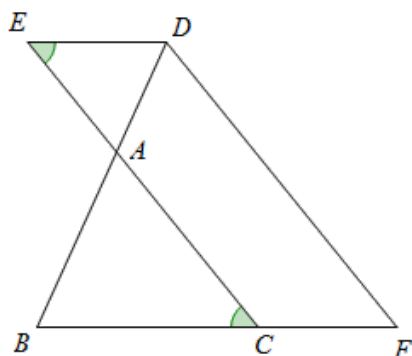


图4

反“8”字模型：

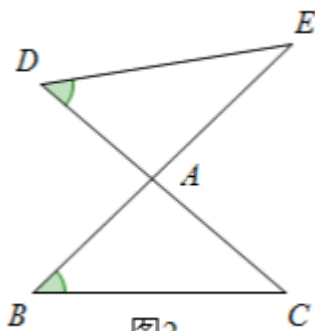
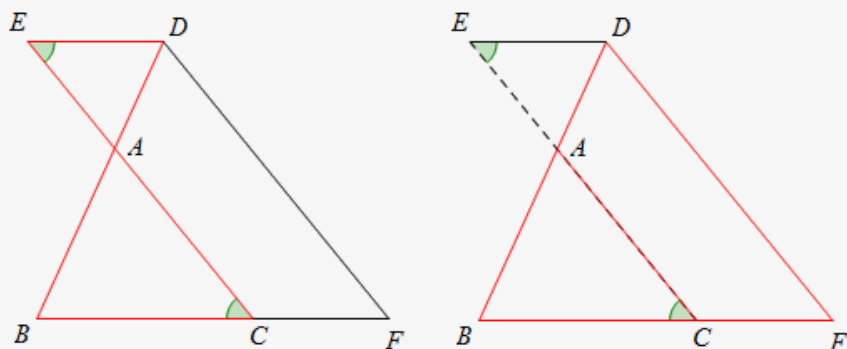


图2

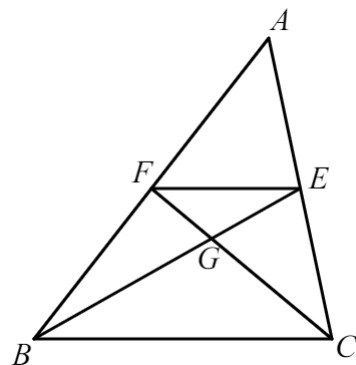
图2中， $\angle B = \angle D$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ， $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ 。

【备注】 1、变式模型是为了提醒学生，对基础模型可以简单变形后，学生也应该能从图中准确快速的找到8字型模型，找到相似的三角形。可以让学生在变式模型中找一找8字模型。如下图中，红色部分的三角形就是图中的8字模型。



2、反“8”字模型是利用对顶角及题中一组相等的角利用“两角对应相等的两个三角形相似”进行证明

如图所示，已知点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 中 AC 、 AB 边的中点， BE 、 CF 相交于点 G ， $FG = 2$ ，则 CF 的长为（ ）。



- A. 4 B. 4.5 C. 5 D. 6

【备注】 此题需要先根据 E 、 F 分别为 AC 、 AB 中点，得到 $EF \parallel BC$ ，然后再由8字相似求解

【答案】 D

【解析】 $\because$ 点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 中 AC 、 AB 边的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC, EF \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle EFG \sim \triangle BCG, \text{ 且相似比为 } 1:2,$$

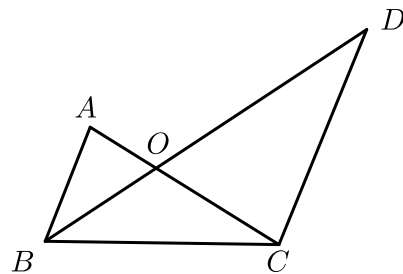
$$\therefore CG = 2FG = 4,$$

$$\therefore CF = FG + CG = 2 + 4 = 6.$$

【标注】 【知识点】相似8字型

栗子6

7. 如图， BO 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，延长 BO 至点 D 使得 $BC = CD$ 。



(1) 求证： $\triangle AOB \sim \triangle COD$ 。

(2) 若 $AB = 2$ ， $BC = 4$ ， $OA = 1$ ，求 OC 长。

【备注】 (1) 由 $BC = CD$ 及 BO 为角平分线得， $\angle ABD = \angle D$ ，利用两角相等证明相似

(2) 相似三角形性质：对应边成比例

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $OC = 2$ 。

【解析】(1) $\because BO$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle ABO = \angle OBC。$$

$$\because BC = CD，$$

$$\therefore \angle OBC = \angle ODC。$$

$$\therefore \angle ABO = \angle ODC。$$

$$\text{又} \because \angle AOB = \angle COD，$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD。$$

(2) $\because \triangle AOB \sim \triangle COD，$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}。$$

$$\text{又} \because AB = 2，BC = 4，OA = 1，BC = CD，$$

$$\therefore OC = 2。$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

三、子母模型与射影定理

共角共边型模型（子母型）：

两个三角形不仅一个角相等，而且有一条边也相等，在加上另一角相等或夹等角的两组对应边成比例可得到相似。公共边（或等边）将成为某两边的比例中项。

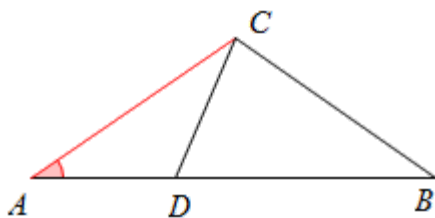


图1

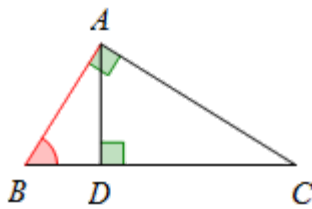


图2

如图1，红色边 AC 和红色角 $\angle A$ 是 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 的公共角和公共边，再找到一组角等或一组边成比例就可以证明两个三角形相似。

如图2，是将图1特殊化后的子母型模型——双垂直模型。

！结论：

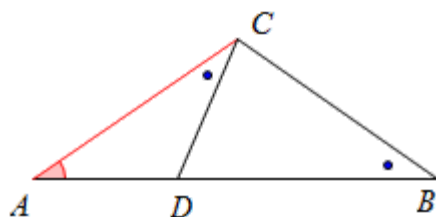


图1

如图1, $\angle ACD = \angle B$, 则 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$, 即 $AC^2 = AD \cdot AB$.

注意: 由 $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, 即 $AC^2 = AD \cdot AB$ 可知, 公共边 AC 的平方等于 AC 的两条对应边 AB 、 AD 的乘积.

思考:

如图2, 你能验证一下在下图中的子母型模型中, “公共边的平方=两条对应边的乘积”这个结论吗?

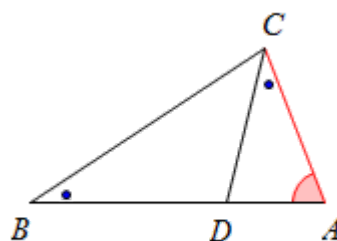


图2

【备注】 通过两个三角形相似, 得到三边的比例式, 进一步推出 $AC^2 = AB \cdot AD$ 即可

射影定理

双垂直模型:

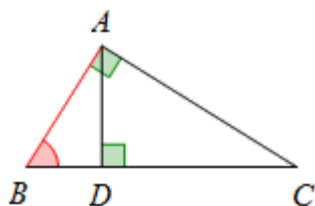


图2

如图2, $\angle BAC = \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, 则 $\triangle BAC \sim \triangle BDA \sim \triangle ADC$

$$\begin{aligned} \triangle BAC \sim \triangle BDA, \quad \frac{AB}{BC} &= \frac{BD}{AB}, \quad \text{即 } AB^2 = BD \cdot BC \\ \triangle BAC \sim \triangle ADC, \quad \frac{AC}{BC} &= \frac{DC}{AC}, \quad \text{即 } AC^2 = DC \cdot BC \\ \triangle BDA \sim \triangle ADC, \quad \frac{BD}{AD} &= \frac{AD}{DC}, \quad \text{即 } AD^2 = BD \cdot DC \end{aligned}$$

同时利用等面积可知: $AB \cdot AC = BC \cdot AD$

! 注意: 射影定理的内容是在双垂直模型中通过相似的性质推导出来的, 定理的内容在选填中可以帮助我们快速得到答案, 但在几何证明题目中想要应用定理内容, 必须通过相似证明之后才能使用.

【备注】双垂直模型的相似证明依据两个角相等：利用互余即可推导

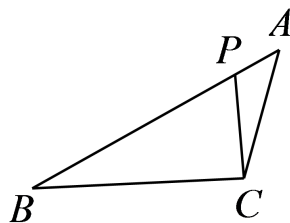
可引导学生这样记忆：

①可以利用在子母型部分讲过的，公共边=两条对应边的乘积。

②在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 上方有一个平行光源，两个直角边在斜边 BC 上会形成正投影：直角边 AB 的影子是 BD ，直角边 AC 的影子是 CD ，结论可以这样记忆：①斜边高的平方等于两影乘积；②直角边平方等于相应的影长乘斜边。

栗子7

8. 如图，已知是 P 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，则在下列四个条件中，不能作为判定 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 相似条件的是（ ）。



A. $\angle ACP = \angle B$

B. $\angle APC = \angle ACB$

C. $\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB}$

D. $\frac{CP}{BC} = \frac{AC}{AB}$

【备注】D选项中两对应边的夹角不一定相等

【答案】D

【解析】 $\because \angle A = \angle A, \angle ACP = \angle B,$

$\therefore \triangle ACP \sim \triangle ABC$ ，A能作为判定 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 相似条件。

$\because \angle A = \angle A, \angle APC = \angle ACB,$

$\therefore \triangle ACP \sim \triangle ABC$ ，B能作为判定 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 相似条件。

$\because \angle A = \angle A, \frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB},$

$\therefore \triangle ACP \sim \triangle ABC$ ，C能作为判定 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 相似条件。

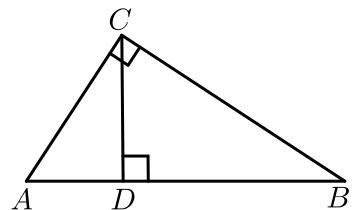
D不能作为判定 $\triangle ACP$ 与 $\triangle ABC$ 相似条件。

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】相似反A字型

栗子8

9. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是边 AB 上的高，若 $AC = 4$ ， $AB = 10$ ，则 AD 的长为（ ）。



A. $\frac{8}{5}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

【备注】直接应用射影定理： $AC^2 = AB \cdot AD$

【答案】A

【解析】 $\because \angle ACB = 90^\circ, CD \perp AB,$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore AC = 4, AB = 10,$$

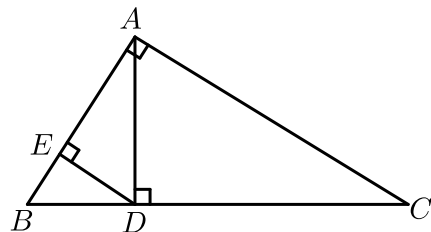
$$\therefore \frac{4}{10} = \frac{AD}{4},$$

$$\therefore AD = \frac{16}{10} = \frac{8}{5},$$

故选A

【标注】【知识点】射影定理（双垂直）

10. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ 于 D ， $DE \perp AB$ 于 E ，若 $AD = 3$ ， $DE = 2$ ，则 AB 、 AC 的长分别为（ ）。



A. $\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{9}{2}$

B. $\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{21}{2}$

C. $\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{9\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{15}}{5}$

【备注】勾股定理求出 AE 的长度后，反复利用射影定理求 AB 、 AC 的值

【答案】A

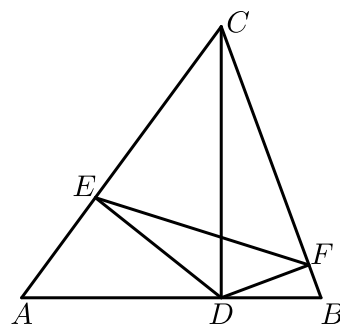
【解析】因为 $AD = 3$ ， $DE = 2$ ，则 $AE = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore AD^2 = AE \cdot AB$$

$$\begin{aligned}\therefore AB &= \frac{9\sqrt{5}}{5} \\ \therefore \triangle AED &\sim \triangle CAB, \\ \therefore \frac{AE}{AC} &= \frac{DE}{AB}, \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \therefore AB &= \frac{9\sqrt{5}}{5}, \\ \text{则根据 } \frac{AB}{AC} &= \frac{2}{\sqrt{5}}, AC = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】射影定理（双垂直）

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CD \perp AB$ 于点 D ， $DE \perp AC$ 于点 E ， $DF \perp BC$ 于点 F 。求证： $\triangle CEF \sim \triangle CBA$ 。



【备注】先分析 $\triangle CEF$ 与 $\triangle CAB$ 有一组公共角 $\angle ECF$ ，因此推出夹角的两边对应成比例即可

【答案】证明见解析。

【解析】 $\because CD \perp AB, DE \perp AC, DF \perp BC,$

$$\therefore \angle DEC = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ECD = \angle DCA,$$

$$\therefore \triangle ECD \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CD},$$

$$\text{即 } CD^2 = CE \cdot CA, \text{同理可得 } CD^2 = CF \cdot CB,$$

$$\therefore CE \cdot CA = CF \cdot CB, \text{即 } \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA},$$

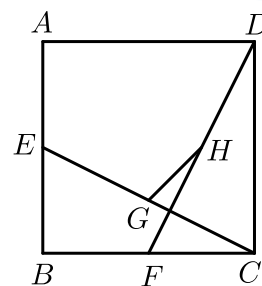
$$\because \angle ECF = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CBA.$$

【标注】【知识点】射影定理（双垂直）

独步天下2

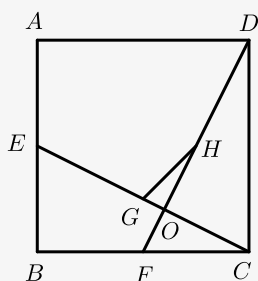
12. 如图，在边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别是边 AB, BC 的中点，连接 EC, FD ，点 G, H 分别是 EC, FD 的中点，连接 GH ，则 GH 的长度为 _____。



【备注】 此题涉及到正方形双十字模型：由 $EC = DF$ 易证 $\triangle EBC \cong \triangle FCD$ ，得到 $EC \perp DF$ ；反过来若 $EC \perp DF$ ，则可证 $EC = DF$

【答案】 1

【解析】 解：设 DF ， CE 交于 O ，



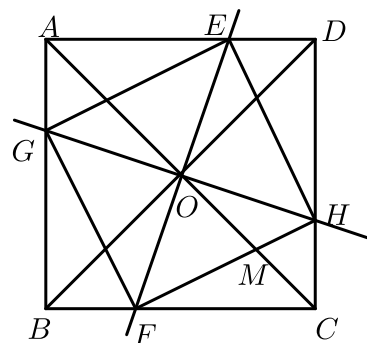
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore \angle B = \angle DCF = 90^\circ$ ， $BC = CD = AB$ ，
 $\because$ 点 E ， F 分别是边 AB ， BC 的中点，
 $\therefore BE = CF$ ，
 $\therefore \triangle CBE \cong \triangle DCF$ (SAS)，
 $\therefore CE = DF$ ， $\angle BCE = \angle CDF$ ，
 $\because \angle CDF + \angle CFD = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BCE + \angle CFD = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle COF = 90^\circ$ ，
 $\therefore DF \perp CE$ ，
 $\therefore CE = DF = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$ ，
 $\because$ 点 G ， H 分别是 EC ， FD 的中点，
 $\therefore CG = FH = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，
 $\because \angle DCF = 90^\circ$ ， $CO \perp DF$ ，
 $\therefore CF^2 = OF \cdot DF$ ，
 $\therefore OF = \frac{CF^2}{DF} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ，
 $\therefore OH = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ， $OD = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore OC^2 = OF \cdot OD, \\
&\therefore OC = \sqrt{\frac{\sqrt{10}}{5} \times \frac{4\sqrt{10}}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}, \\
&\therefore OG = CG - OC = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{2\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \\
&\therefore HG = \sqrt{OG^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}} = 1, \\
&\text{故答案为: } 1.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】射影定理（双垂直）

独步天下3

13. 如图，已知正方形 $ABCD$ ， O 为对角线 AC 与 BD 的交点，过点 O 的直线 EF 与直线 GH 分别交 AD ， BC ， AB ， CD 于点 E ， F ， G ， H 。若 $EF \perp GH$ ， OC 与 FH 相交于点 M ，当 $CF = 4$ ， $AG = 2$ 时，则 OM 的长为_____。



【备注】 $\triangle MOH$ 与 $\triangle HOC$ 为子母模型，可得 $OH^2 = OM \cdot OC$

【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore \angle OAB = \angle OBC = 45^\circ, OA = OB, AC \perp BD,$$

$$\text{又} \because EF \perp GH,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle GOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB - \angle GOB = \angle GOF - \angle GOB,$$

$$\text{即} \angle AOG = \angle BOF,$$

在 $\triangle AOG$ 与 $\triangle BOF$ 中，

$$\begin{cases} \angle OAB = \angle OBC \\ OA = OB \\ \angle AOG = \angle BOF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOG \cong \triangle BOF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AG = BF = 2,$$

同理可得 $CH = BF = 2$,

又 $\because CF = 4$,

$\therefore BC = BF + CF = 2 + 4 = 6$,

即正方形 $ABCD$ 的边长为 6 ,

$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle HCF$ 中 ,

$$FH = \sqrt{CF^2 + CH^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4}$$

$$= 2\sqrt{5} .$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2} \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{10} ,$$

$\therefore \angle OHM = \angle OCH = 45^\circ$,

又 $\because \angle HOM = \angle COH$,

$\therefore \triangle MOH \sim \triangle HOC$.

$$\therefore \frac{OM}{OH} = \frac{OH}{OC} ,$$

$$\frac{OM}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} ,$$

$$OM = \frac{5\sqrt{2}}{3} ,$$

$\therefore OM$ 的长为 $\frac{5\sqrt{2}}{3}$.

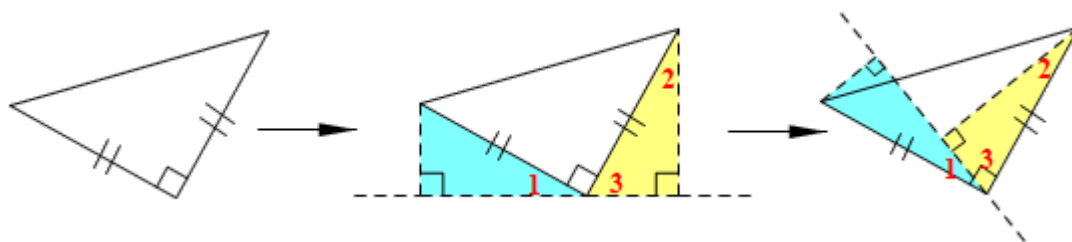
【标注】【知识点】正方形与全等综合

四、一线三等角模型

1. 一线三垂直模型

知识回顾：只要出现等腰直角三角形，可以过直角点作一条直线，然后过 45° 顶点作该直线的垂线，构造三垂直模型，必有如下全等三角形：

经典模型：

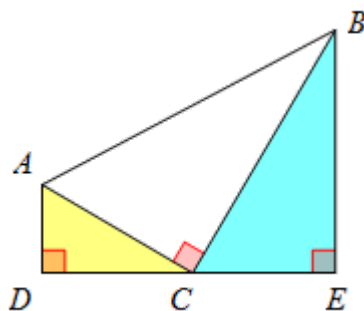


【备注】图中可证蓝色与黄色三角形全等（利用 AAS 进行证明）

一线三垂直相似模型

根据上面的证明，你能试着证明下图中两个三角形的关系吗？

已知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $AC \neq BC$ ， $AD \perp DE$ 于点 D ， $BE \perp DE$ 于点 E 。



【备注】 这部分内容希望老师引导学生写出证明过程

证明：

$$\because \angle ACD + \angle DAC = 90^\circ, \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BCE, \text{ (同理可证 } \angle ACD = \angle CBE \text{)}$$

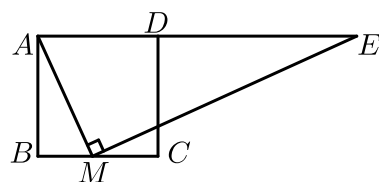
$$\text{又} \because \angle D = \angle E,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BED$$

举个“栗子”

栗子9

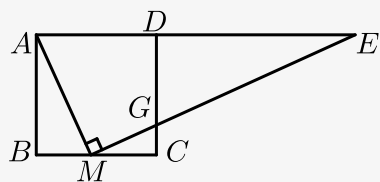
14. 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 为 BC 上一点， $ME \perp AM$ ， ME 交 AD 的延长线于点 E ，若 $AB = 12$ ， $BM = 5$ ，则 DE 的长为 _____。



【备注】 此题可以直接利用 $\triangle ABM \sim \triangle MDE$ 求解

【答案】 $\frac{109}{5}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AB = 12$ ， $BM = 5$ ，



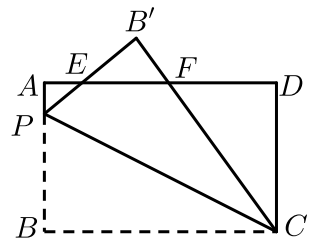
$$\therefore MC = 12 - 5 = 7,$$

$$\begin{aligned}
&\because ME \perp AM, \\
&\therefore \angle AME = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AMB + \angle CMG = 90^\circ, \\
&\because \angle AMB + \angle BAM = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAM = \angle CMG, \angle B = \angle C = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle ABM \sim \triangle MCG, \\
&\therefore \frac{AB}{MC} = \frac{BM}{CG}, \text{ 即 } \frac{12}{7} = \frac{5}{CG}, \text{ 解得 } CG = \frac{35}{12}, \\
&\therefore DG = 12 - \frac{35}{12} = \frac{109}{12}. \\
&\because AE \parallel BC, \\
&\therefore \angle E = \angle CMG, \angle EDG = \angle C, \\
&\therefore \triangle MCG \sim \triangle EDG, \\
&\therefore \frac{MC}{DE} = \frac{CG}{DG}, \text{ 即 } \frac{7}{DE} = \frac{\frac{35}{12}}{\frac{109}{12}}, \\
&\text{解得 } DE = \frac{109}{5}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

独步天下4

15. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 8$ ，点 P 在 AB 上， $AP = 1$ 。将矩形 $ABCD$ 沿 CP 折叠，点 B 落在点 B' 处。 $B'P$ 、 $B'C$ 分别与 AD 交于点 E 、 F ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【备注】过 B 点构造一线三垂直，利用多组相似求解

【答案】 $\frac{35}{12}$

【解析】如图，过点 B' 作 $B'M \perp BA$ 的延长线于点 M ，作 $B'N \perp CD$ 的延长线于点 N ，

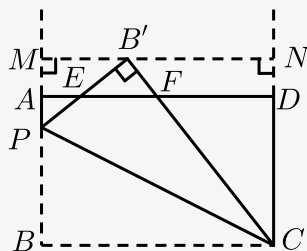
设 $AM = x$ ，则 $ND = x$ ，

由翻折可知： $PB' = PB = 4$ ， $B'C = BC = 8$

， $\angle PB'C = \angle B = 90^\circ$ ，

$\because B'M \perp BA$ ， $B'N \perp CD$ ，

$\therefore \angle PMB' = \angle CNB' = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle PB'M + \angle CB'N = \angle PB'M + \angle MPB' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CB'N = \angle B'PM,$$

$$\therefore \triangle B'PM \sim \triangle CB'N,$$

$$\therefore \frac{MP}{B'N} = \frac{PB'}{CB'},$$

$$\text{即 } \frac{x+1}{B'N} = \frac{4}{8},$$

$$\therefore B'N = 2x + 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle CNB'$ 中, 由勾股定理得:

$$CN^2 + B'N^2 = CB'^2,$$

$$\therefore (5+x)^2 + (2x+2)^2 = 8^2,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{7}{5}, x_2 = -5 (\text{舍}),$$

$$\therefore AM = \frac{7}{5}, B'N = \frac{24}{5},$$

$$\therefore B'M = \frac{16}{5}, PM = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AE \parallel B'N,$$

$$\therefore \triangle PAE \sim \triangle PMB',$$

$$\therefore \frac{PA}{PM} = \frac{AE}{MB'},$$

$$\text{即 } \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{AE}{\frac{16}{5}},$$

$$\therefore AE = \frac{4}{3},$$

$$\text{同理可得: } DF = \frac{15}{4},$$

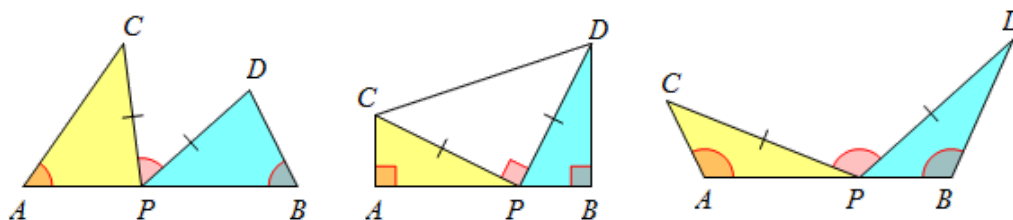
$$\therefore EF = AD - AE - DF = 8 - \frac{4}{3} - \frac{15}{4} = \frac{35}{12}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

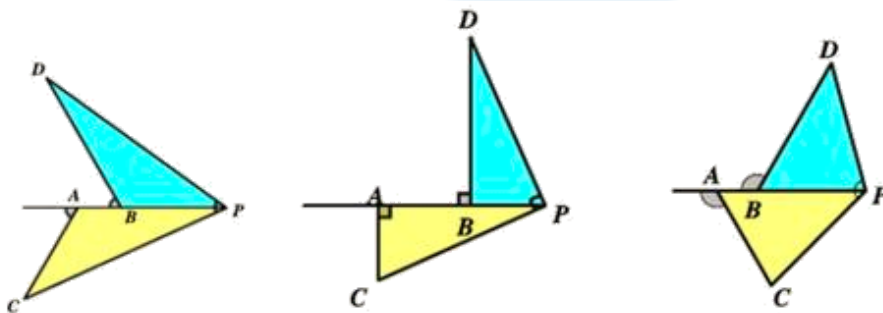
2. 一线三等角模型

知识回顾: 只要在一条直线上出现三个角相等, 一般都可以构造全等三角形解决问题.

经典模型:



如图, 若 $CP = DP$



【备注】第一行中： $\angle A = \angle P = \angle B$ ， $CP = DP$ ，易证 $\triangle ACP \cong \triangle BPD$

第二行中：

$$\because \angle CAP = \angle PBD,$$

$$\text{又} \because \angle C + \angle CPA = \angle CPA + \angle BPD,$$

$$\therefore \angle C = \angle CPA,$$

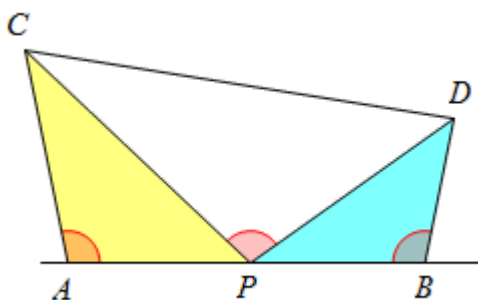
$$\text{又} \because CP = DP,$$

$$\therefore \triangle CAP \cong \triangle PBD$$

一线三等角相似模型

根据上面的证明，你能试着证明下图中两个三角形的关系吗？

已知 $\angle CAP = \angle CPD = \angle PBD$ ，且 $PC \neq PD$ 。



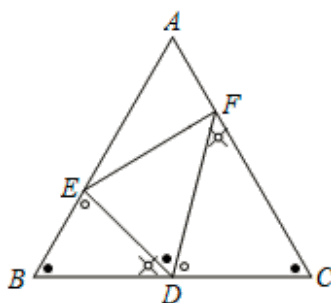
【备注】 $\because \angle ACP + \angle APC = \angle APC + \angle BPD$ ，

$$\therefore \angle ACP = \angle BPD,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle BPD$$

以等腰三角形为背景的“一线三等角”相似模型：

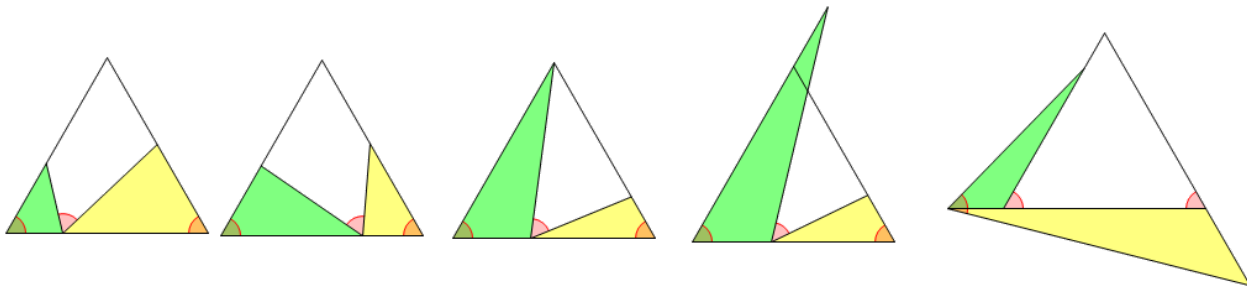


(1) 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = \angle EDF = \angle C$ ，则 $\triangle EBD \sim \triangle DCF$.

(2) 特别地，若点 D 是 BC 的中点，那么还有 $\triangle EBD \sim \triangle DCF \sim \triangle EDF$.

证明：

经典图形：



【备注】(2)证明：

当点 D 是 BC 中点时，已知 $\triangle EBD \sim \triangle DCF$ ，

$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{DE}{FD} ,$$

又 $\because BD = CD$ ，

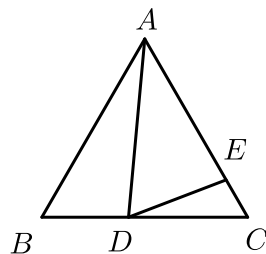
$$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{DE}{DF} ,$$

又 $\because \angle B = \angle EDF$ ，可得 $\triangle EBD \sim \triangle EDF$.

经典图形中的两个三角形相似

栗子10

16. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边上一点， E 为 AC 边上一点，且 $\angle ADE = 60^\circ$ ， $BD = 3$ ， $CE = 2$ ，则等边 $\triangle ABC$ 的边长为 _____ .



【备注】由 $\angle B = \angle ADE = \angle C = 60^\circ$ ，利用 $\triangle ABD \sim \triangle CDE$ 求解，注意利用方程思想

【答案】9

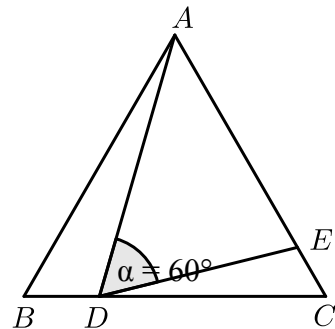
【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, AB = BC,$
 $\therefore CD = BC - BD = AB - 3,$
 $\angle BAD + \angle ADB = 120^\circ,$
 $\therefore \angle ADE = 60^\circ,$
 $\therefore \angle ADB + \angle EDC = 120^\circ,$
 $\therefore \angle DAB = \angle EDC,$
 又 $\because \angle B = \angle C = 60^\circ,$
 $\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$
 $\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BD}{CE},$ 即 $\frac{AB}{AB-3} = \frac{3}{2},$
 解得 $AB = 9.$
 故答案为9.

【标注】【知识点】一线三等角相似

独步天下5

17. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点D、E分别在BC、AC上, 且 $\angle ADE = 60^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 的边长为6, $CD = 2BD$, 则AD的长为 _____.



【备注】一线三等角模型与射影定理综合, $\triangle ABD \sim \triangle CDE$ 只能求解出CE的长, 因此想求AD, 寻找其余以AD为边的三角形即可找到射影定理

【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle B = \angle C = \angle BAC = 60^\circ,$
 $\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD, \angle ADE = 60^\circ,$
 $\therefore \angle BAD = \angle CDE,$
 $\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$
 $\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE},$

$$\because AB = BC = CA = 6, CD = 2BD$$

$$\therefore BD = 2, CD = 4,$$

$$\therefore \frac{6}{4} = \frac{2}{CE},$$

$$\therefore CE = \frac{4}{3},$$

$$\therefore AE = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3},$$

$$\because \triangle ADC \sim \triangle AED,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore AD^2 = AE \times AC = \frac{14}{3} \times 6 = 28,$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{7}.$$

故答案为： $2\sqrt{7}$.

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合